Томский межвузовский центр
дистанционного образования
ТМЦДО

А.М. Кириллов

ФИЗИКА

В КОНСПЕКТАХ И ПРИМЕРАХ

Часть 1

КИНЕМАТИКА

**Учебно-методическое пособие
для поступающих в ТУСУР**

ТОМСК – 2006

6 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решите нижеследующие задачи самостоятельно (см. инструкцию по оформлению задач) и сравните своё решение с приведённым ниже.

6.1 Средняя скорость

1. Автомобиль, двигаясь равномерно, проходит первую половину пути со скоростью 20 км/ч, а вторую — 30 км/ч. Определить среднюю скорость на всём пути. Ответ дать в км/ч.

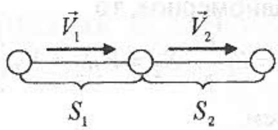
2. Автомобиль, двигаясь равномерно, проходит первую половину времени со скоростью 20 км/ч, а вторую — 30 км/ч. Определить среднюю скорость на всём пути. Ответ дать в км/ч.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 1 и 2

1. Дано:
$S_1 = S_2$;
$V_1 = 20$ км/ч;
$V_2 = 30$ км/ч

$V_{ср} = ?$

Решение:



$S_1 = S_2$ (по условию задачи)

По определению: $V_{ср} = \dfrac{S}{t}$.

$$S = S_1 + S_2;$$
$$t = t_1 + t_2,$$

где $t_1 = \dfrac{S_1}{V_1}$ и $t_2 = \dfrac{S_2}{V_2}$ — времена прохождения путей S_1 и S_2 соответственно.

В результате получаем:

$$V_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S_1 + S_2}{\dfrac{S_1}{V_1} + \dfrac{S_2}{V_2}} = \frac{2\cancel{S_1}}{\dfrac{\cancel{S_1}}{V_1} + \dfrac{\cancel{S_1}}{V_2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2}.$$

Итак: $V_{ср} = \dfrac{2V_1V_2}{V_1 + V_2}$.

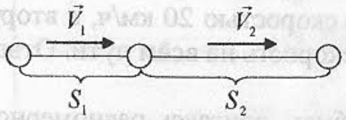
Расчет. Так как ответ требуется представить в км/ч, то перевод значений V_1 и V_2 в м/с необязателен.

$$V_{\text{ср}} = \frac{2\times 20\times 30}{20+30} = \frac{1200}{50} = \frac{120}{5} = 24 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $\boxed{V_{\text{ср}} = 24 \text{ км/ч}}$.

2. Дано:
$t_1 = t_2$;
$V_1 = 20$ км/ч;
$V_2 = 30$ км/ч
$V_{\text{ср}} = ?$

Решение:



По определению: $V_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t}$.

$$S = S_1 + S_2.$$

Если t — время прохождения пути S, то $t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2}$.

Так как движение равномерное, то

$$S_1 = V_1 t_1 = V_1\frac{t}{2},\ S_2 = V_2 t_2 = V_2\frac{t}{2}.$$

В результате получаем:

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2}{t} = \frac{V_1\frac{\cancel{t}}{2} + V_2\frac{\cancel{t}}{2}}{\cancel{t}} = \frac{V_1+V_2}{2}.$$

Итак: $V_{\text{ср}} = \dfrac{V_1+V_2}{2}$.

Расчет. Так как ответ требуется представить в км/ч, то перевод значений V_1 и V_2 в м/с необязателен.

$$V_{\text{ср}} = \frac{V_1+V_2}{2} = \frac{20+30}{2} = 25 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $\boxed{V_{\text{ср}} = 25 \text{ км/ч}}$.

6.2 Относительность движения и закон сложения скоростей

3. По шоссе в одном направлении движутся два автомобиля. Скорость первого — 10 м/с, второй догоняет его со скоростью 20 м/с. Расстояние между автомобиля в начальный момент времени равно 100 м. Через сколько секунд второй автомобиль догонит первый?

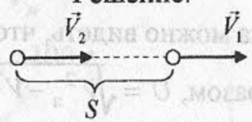
4. Две пристани находятся на противоположных берегах реки шириной 500 м, точно напротив друг друга. Определить в СИ минимальный промежуток времени, за который можно осуществить переправу на лодке, скорость которой в стоячей воде равна 5 м/с. Скорость течения реки — 3 м/с.

5. Ширина реки 500 м. Определить в СИ минимальный промежуток времени, за который можно осуществить переправу с одного берега на другой на лодке, скорость которой в стоячей воде равна 5 м/с. Скорость течения реки — 3 м/с.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 3–5

3. Дано:
$V_1 = 10$ м/с;
$V_2 = 20$ м/с;
$S = 100$ м
$t = ?$

Решение:



Скорость второго автомобиля относительного первого:

$$U = V_2 - V_1.$$

Второй автомобиль, двигаясь равномерно относительно первого, проходит расстояние:

$$S = Ut;$$

$$t = \frac{S}{U} = \frac{S}{V_2 - V_1}.$$

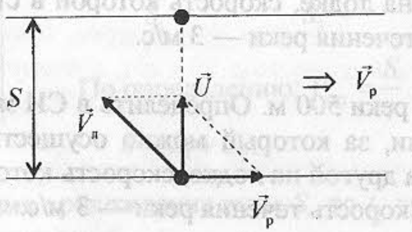
Расчет. $t = \dfrac{100}{20-10} = 10$ с.

Ответ: $\boxed{t = 10\text{ с}}$.

4. Дано:
$S = 500$ м;
$V_л = 5$ м/с;
$V_р = 3$ м/с
$t = ?$

Решение:

Переправа займет наименьшее время, если в системе отсчета, связанной с Землей, лодка будет двигаться перпендикулярно берегу (т.е. вдоль линии, соединяющей пристани).



Согласно закону сложения скоростей

$$\vec{U} = \vec{V}_л + \vec{V}_р.$$

Из рисунка можно видеть, что $V^2{}_л = U^2 + V^2{}_р$.

Таким образом, $U = \sqrt{V^2{}_л - V^2{}_р}$.

Следовательно, $S = Ut$ и $t = \dfrac{S}{\sqrt{V^2{}_л - V^2{}_р}}$.

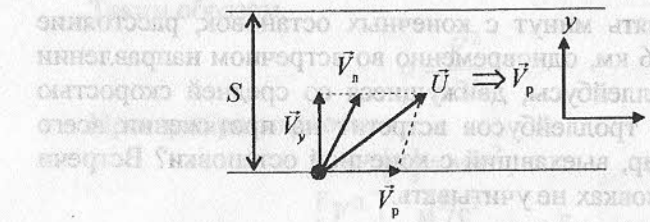
Расчет: $t = \dfrac{500}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \dfrac{500}{4} = 125$ с.

Ответ: $\boxed{t = 125\text{ с}}$.

5. Дано:
$S = 500$ м;
$V_л = 5$ м/с;
$V_р = 3$ м/с
$t = ?$

Решение:

Согласно закону сложения скоростей $\vec{U} = \vec{V}_л + \vec{V}_р$ (см. рисунок).



Очевидно, что скорость приближения к противоположному берегу определяется проекцией вектора скорости $\vec{U}$ на направление оси y (см. рисунок). Максимальное значение проекции

$$V_{y\max} = V_л.$$

В системе отсчета, связанной с водой, лодка, двигаясь прямолинейно, проходит путь $S = V_л t$. Отсюда

$$t = \frac{S}{V_л}.$$

Расчет: $t = \dfrac{500}{5} = 100$ с.

Ответ: $\boxed{t = 100\text{ с}}$.

6.3 Равномерное и равноускоренное движение

6. Тележка из состояния покоя скатывается с наклонной плоскости длиной 4 м. С каким ускорением скатывается тележка, если её скорость в конце пути равна 4 м/с? Ответ дать в СИ.

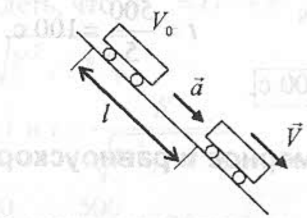
7. Поезд начал торможение в тот момент, когда его скорость равнялась 2,5 м/с. Через 4 с поезд остановился. Найти в СИ путь, пройденный поездом при торможении.

8. Время отправления электрички по расписанию 12 часов дня. Вы подошли к тому месту, где должно находиться начало первого вагона. На Ваших часах 12^{00}, но мимо Вас уже начинает проезжать предпоследний вагон, который движется мимо в течение 3,14 с. На сколько секунд отстают Ваши часы, если электричка состоит из 6-и вагонов?

9. Каждые пять минут с конечных остановок, расстояние между которыми 6 км, одновременно во встречном направлении отправляются троллейбусы, движущиеся со средней скоростью 18 км/ч. Сколько троллейбусов встретит на протяжении всего маршрута пассажир, выехавший с конечной остановки? Встречи на конечных остановках не учитывать.

10. Вагонетка должна в кратчайший срок перевозить груз на расстояние 1 км. Она может ускорять или замедлять своё движение только с одинаковым по величине ускорением 0,9 м/с², переходя затем в равномерное движение или останавливаясь. Какую наибольшую скорость (в СИ) должна развивать вагонетка, чтобы выполнить указанное требование?

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 6–10

6. Дано:	Решение:
$l = 4$ м; $V_0 = 0$; $V = 4$ м/с	
$a = ?$	

Путь при равноускоренном движении:

$$l = V_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2},$$

где t — время, за которое тележка скатывается с плоскости.

Тогда

$$V = V_0 + at = at.$$

Из $V = at$ следует, что $t = \frac{V}{a}$.

Подстановка $t = \frac{V}{a}$ в выражение для пути:

$$l = \frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2}\frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{2a}.$$

Таким образом,

$$a = \frac{V^2}{2l}.$$

Проверка размерности:

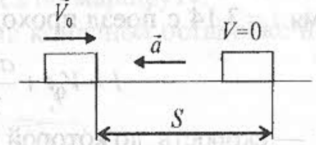
$$[a] = \text{м/с}^2;$$

$$\left[\frac{V^2}{2l}\right] = \frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}} = \text{м/с}^2.$$

Размерность совпадает.

Расчет: $a = \frac{4^2}{2 \cdot 4} = 2$ м/с².

Ответ: $\boxed{a = 2 \text{ м/с}^2}$.

7. Дано:	Решение:
$V_0 = 2{,}5$ м/с; $t = 4$ с; $V = 0$	
$S = ?$	

При равноускоренном движении

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Определим ускорение

$$a = \frac{\Delta V}{t} = \frac{V - V_0}{t}.$$

Так как $V = 0$, то

$$a = -\frac{V_0}{t}. \qquad (2)$$

Подставим отношение (2) в выражение (1):

$$S = V_0 t - \frac{V_0 t^2}{2t} = \frac{V_0 t}{2}.$$

Итак, $S = \frac{V_0 t}{2}$.

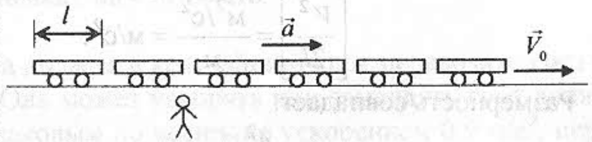
Расчет: $S = \frac{2{,}5 \cdot 4}{2} = 5$ м.

Ответ: $\boxed{S = 5 \text{ м}}$.

8. Дано:
$t = 3{,}14$ с;
$N = 6$

$\Delta t = ?$

Решение:



Пусть l — длина одного вагона. Тогда, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, поезд прошел к указанному времени путь

$$S = (N-2)l = \frac{a\Delta t^2}{2},$$

где Δt — время, на которое опоздал пассажир.

За время $t = 3{,}14$ с поезд проходит расстояние

$$l = V_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где $V_0 = a\Delta t$ — скорость, до которой разогнался поезд за время Δt.

Итак, $$l = \frac{a\Delta t^2}{2(N-2)} = a\Delta t t + \frac{at^2}{2}.$$

Получаем квадратное уравнение

$$\Delta t^2 - 2(N-2)t\Delta t - (N-2)t^2 = 0.$$

$$D = 4(N-2)^2 t^2 + 4(N-2)t^2 = 4(N-2)(N-1)t^2.$$

$$[D] = \text{c}^2.$$

$$\Delta t = \frac{2(N-2)t \pm \sqrt{D}}{2} = (N-2)t \pm \sqrt{(N-2)(N-1)t^2}.$$

Проверка размерности:

$$[\Delta t] = \text{c}, \quad \left[\frac{2(N-2)t \pm \sqrt{D}}{2}\right] = \text{c} \pm \sqrt{\text{c}^2} = \text{c}.$$

Размерность совпадает.

Расчет: $\Delta t = (6-2)\cdot 3{,}14 + \sqrt{4\cdot 5\cdot 3{,}14^2} = 12{,}56 + \sqrt{200} =$
$= 12{,}56 + 10\sqrt{2} = 12{,}56 + 14{,}1 = 26{,}66$ с.

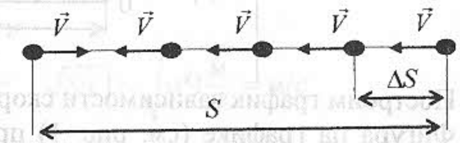
Отрицательный корень не имеет физического смысла.

Ответ: $\boxed{\Delta t = 26{,}66 \text{ с}}$.

9. Дано:
$\Delta t = 5$ мин $= \frac{1}{12}$ ч;
$S = 6$ км;
$V = 18$ км/ч

$N = ?$

Решение:



$$N = N_1 + N_2 - 1.$$

N_1 — число встречных троллейбусов, уже находящихся на маршруте.

N_2 — число троллейбусов, вышедших на маршрут за время движения «нашего» троллейбуса по маршруту.

«–1» — так как встреча на конечной остановке не учитывается.

$$N_1 = \frac{S}{\Delta S}.$$

$\Delta S = V\Delta t$ — расстояние между троллейбусами, движущимися в одном направлении.

$$N_2 = \frac{t}{\Delta t}.$$

$t = \frac{S}{V}$ — время движения троллейбуса по маршруту.

Итак, $N = N_1 + N_2 - 1 = \frac{S}{\Delta S} + \frac{t}{\Delta t} - 1 = \frac{S}{V\Delta t} + \frac{S}{V\Delta t} - 1 = \frac{2S}{V\Delta t} - 1.$

$$N = \frac{2S}{V\Delta t} - 1.$$

Расчет: $$N = \frac{2\cdot 6}{18\cdot\dfrac{1}{12}} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Ответ: $\boxed{N=7}$.

10. Дано:
$S = 1$ км;
$a = 0{,}9$ м/с^2;
$t = t_{\min}$

$V_{\max} = ?$

Решение:

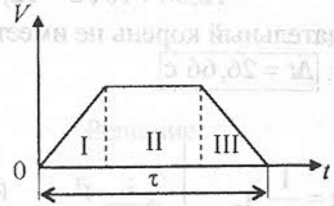


Рис. 1

Построим график зависимости скорости от времени.

Фигура на графике (см. рис. 1) представляет собой равнобочную трапецию, площадь S которой численно равна пути $S = 1$ км (τ — время движения вагонетки).

Область I отображает участок равноускоренного движения.

Область II отображает участок равномерного движения.

Область III отображает участок равнозамедленного движения.

Очевидно, что наклон боковых сторон трапеции определяется величиной ускорения a.

Будем уменьшать основание трапеции (время движения τ), сохраняя при этом наклон боковых сторон (ускорение a) и площадь (путь S) трапеции. В результате трапеция превратится («выродится») в равнобедренный треугольник с основанием $t_{\min}$ и высотой $V_{\max}$ (см. рис. 2).

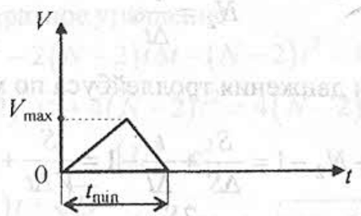


Рис. 2

Таким образом, $$V_{\max} = a\frac{t_{\min}}{2}.$$

Путь $$S = 2\cdot\frac{a\left(\dfrac{t_{\min}}{2}\right)^2}{2} = \frac{at_{\min}^2}{4}.$$

Время движения $$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{S}{a}}.$$

Итак, $$V_{\max} = a\frac{t_{\min}}{2} = a\frac{2\sqrt{\dfrac{S}{a}}}{2} = a\sqrt{\frac{S}{a}} = \sqrt{Sa}.$$

Проверка размерности:
$$[V_{\max}] = \text{м/с},\ \left[\sqrt{Sa}\right] = \sqrt{\text{м}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{м/с}.$$

Размерность совпадает.

Расчет: $V_{\max} = \sqrt{1000\cdot 0{,}9} = \sqrt{900} = 30$ м/с.

Ответ: $\boxed{V_{\max} = 30 \text{ м/с}}$.

6.4 Движение в поле силы тяжести

11. Скорость движущегося вверх лифта нарастает с ускорением 6,2 м/с^2. В момент времени, когда его скорость становится равной 1,2 м/с, с потолка падает болт и ударяется о пол. Определить в СИ расстояние, пройденное болтом относительно шахты за время его падения. Высота кабины лифта равна 2 м.

12. С балкона высотой 10 м над поверхностью Земли вертикально вверх бросили камешек с начальной скоростью 5 м/с. Найти в СИ модуль скорости, с которой камешек упадёт на Землю? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

13. На горизонтальной поверхности лежит клин, а на его наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол, тангенс которого равен 1,6, лежит тело. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтали, чтобы тело свободно падало вниз? Ответ дать в СИ.

14. Самолёт, летящий на высоте 4,5 км по прямой со скоростью 100 м/с, должен сбросить бомбу в цель, находящуюся впереди по курсу. На каком расстоянии от цели должна находиться точка на Земле, над которой должен произойти сброс бомбы? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ дать в км.

15. Камень брошен с поверхности Земли под некоторым углом к горизонту. Наивысшая точка его траектории оказалась на высоте 25 м над Землёй. В этой точке радиус кривизны траектории составил 40 м. Определить в СИ начальную скорость камня. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

16. Из миномёта, расположенного у основания горы, ведётся обстрел объектов противника, расположенных на плоском склоне горы. Склон составляет с горизонтом угол 30°. Ствол миномёта установлен под углом 60° к горизонту, и мины вылетают из него со скоростью 90 м/с. Определить в СИ минимальное расстояние между миномётом и местом падения мины. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

17. Камень брошен с Земли со скоростью 21 м/с под углом 60° к горизонту. Определить в СИ высоту, на которой вектор скорости камня будет составлять с горизонтом 30°. Сопротивлением воздуха пренебречь.

18. Теплоход плывёт по морю со скоростью 36 км/ч. На палубе мальчик играет с мячом. В некоторый момент он бросает мяч вертикально вверх со скоростью 20 м/с, и спустя некоторое время мяч достигает высшей точки своей траектории. Определить перемещение мяча относительно Земли за данное время. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

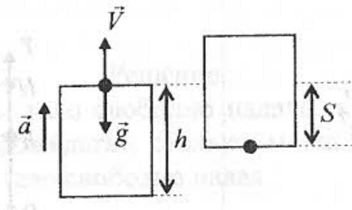
19. На пути шарика, свободно падающего с высоты 6 м, находится расположенная под углом 45° к горизонту площадка. В результате удара о площадку направление скорости становится горизонтальным. На какой высоте должна находиться площадка, чтобы время падения было максимальным? Ответ дать в СИ.

20. Автомобиль с колёсами радиусом 40 см движется со скоростью 10 м/с по горизонтальной дороге. На какую максимальную высоту может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колёс автомобиля? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ дать в СИ.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11–20

11. Дано:
$a = 6{,}2$ м/с^2;
$V = 1{,}2$ м/с;
$h = 2$ м
$S = ?$

Решение:



За время падения болта лифт, двигаясь вверх, проходит расстояние

$$h - S = Vt + \frac{at^2}{2} \qquad (1)$$

Болт относительно шахты лифта проходит расстояние

$$S = -Vt + \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Сложим выражения (1) и (2) и в результате получим путь, пройденный болтом относительно лифта

$$h = \frac{(g+a)t^2}{2}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) можно определить время падения болта

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (2), получим

$$S = -V\sqrt{\frac{2h}{g+a}} + \frac{gh}{g+a}.$$

Проверка размерности:

$$[S]=\text{м},\ \left[-V\sqrt{\frac{2h}{g+a}}+\frac{gh}{g+a}\right]=\frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}}+\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}=\text{м}+\text{м}=\text{м}.$$

Размерность совпадает.

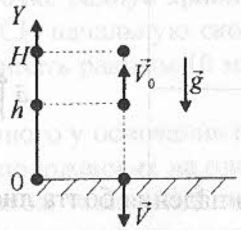
Расчет: $S=-1,2\sqrt{\frac{2\cdot 2}{9,8+6,2}}+\frac{9,8\cdot 2}{9,8+6,2}=-0,6+1,225=0,625$ м.

Ответ: $\boxed{S=0,625\ \text{м}}$.

12. Дано:
$h=10$ м;
$V_0=5$ м/с;
$g=10$ м/с^2

$V=?$

Решение:



Модуль скорости камня в произвольный момент времени $t<t_{пад}$ ($t_{пад}$ — время падения камня) определяется выражением

$$V=|V_0-gt| \qquad (1)$$

Определив время падения камня $t_{пад}$ и подставив его в выражение (1), получим значение величины скорости в момент падения камня на землю.

Координату камня (высота над землей) определим из выражения

$$y=h+V_0t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

В момент падения $t=t_{пад}$ координата $y=0$. Тогда из выражения (2) следует квадратное уравнение относительно $t_{пад}$

$$\frac{g}{2}t_{пад}^2-V_0t_{пад}-h=0. \qquad (3)$$

Определим время падения камня:

$$5t_{пад}^2-5t_{пад}-10=0,\ t_{пад}^2-t_{пад}-2=0,$$

$$D=1-4\cdot(-2)=9,\ t_{пад}=\frac{1+\sqrt{D}}{2}=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2\ \text{с}.$$

Отрицательный корень уравнения не имеет физического смысла.

Теперь, зная время падения из выражения (1) можно определить скорость камня в момент падения.

Расчет: $V=|V_0-gt_{пад}|=|5-10\cdot 2|=15$ м/с.

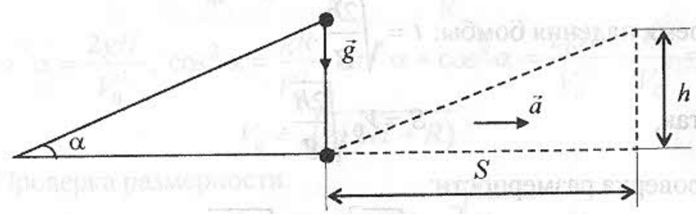
Ответ: $\boxed{V=15\ \text{м/с}}$.

13. Дано:
$\text{tg}\alpha=1,6$

$a=?$

Решение:

Чтобы тело свободно падало, клин должен «освобождать» столько места, сколько проходит тело свободно падая.



Будем считать, что за некоторое время тело, падая свободно, проходит расстояние $h=\frac{gt^2}{2}$.

Тогда за это время клин должен пройти расстояние $S=\frac{at^2}{2}$.

Очевидно, что $\text{tg}\alpha=\frac{h}{S}$. Таким образом, $\text{tg}\alpha=\frac{h}{S}=\frac{g}{a}$.

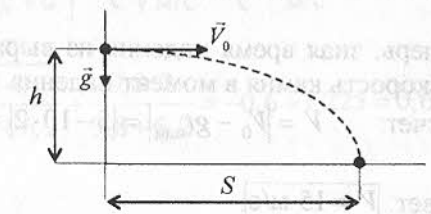
Следовательно, $a=\frac{g}{\text{tg}\alpha}$.

Расчет: $a=\frac{g}{\text{tg}\alpha}=\frac{9,8}{1,6}=6,125$ м/с^2.

Ответ: $\boxed{a=6,125\ \text{м/с}^2}$.

14. Дано:
$h = 4{,}5$ км;
$V_0 = 100$ м/с;
$g = 10$ м/с^2
$S = ?$

Решение:



В данном случае движение бомбы представляет собой комбинацию равномерного движения вдоль горизонтали и равноускоренного по вертикали.

Путь по вертикали: $h = \dfrac{gt^2}{2}$.

Путь по горизонтали: $S = V_0 t$.

Время падения бомбы: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Итак, $S = V_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Проверка размерности:

$$[S] = \text{м},\ \left[V_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}}\sqrt{\frac{\text{м}}{\text{м/с}^2}} = \text{м}.$$

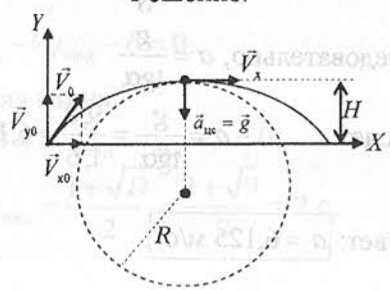
Размерность совпадает.

Расчет: $S = V_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 100\sqrt{\dfrac{2\cdot 4500}{10}} = 100\sqrt{900} = 3000\ \text{м} = 3\ \text{км}$.

Ответ: $\boxed{S = 3\ \text{км}}$

15. Дано:
$H = 25$ м;
$R = 40$ м;
$g = 10$ м/с^2
$V_0 = ?$

Решение:



Максимальная высота подъема $H = \dfrac{gt_{пад}^2}{2}$, где $t_{пад} = t_{под}$ — время падения с высоты H, равное времени подъема на данную высоту.

Время подъема на высоту H определено из условия, что на максимальной высоте вертикальная составляющая скорости обращается в нуль:

$$V_y = V_{y0} - gt_{под} = V_0\sin\alpha - gt_{под} = 0.\ t_{под} = \frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

Таким образом, $H = \dfrac{gt_{под}^2}{2} = \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{V_0\sin\alpha}{g}\right)^2 = \dfrac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

На высоте H центростремительное ускорение

$$a_{цс} = g = \frac{V_{x0}^2}{R} = \frac{V_0^2\cos^2\alpha}{R}.$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2gH}{V_0^2},\ \cos^2\alpha = \frac{gR}{V_0^2};\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{2gH}{V_0^2} + \frac{gR}{V_0^2} = 1.$$

$$V_0 = \sqrt{g(2H+R)}.$$

Проверка размерности:

$$[V_0] = \frac{\text{м}}{\text{с}},\ \left[\sqrt{g(2H+R)}\right] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

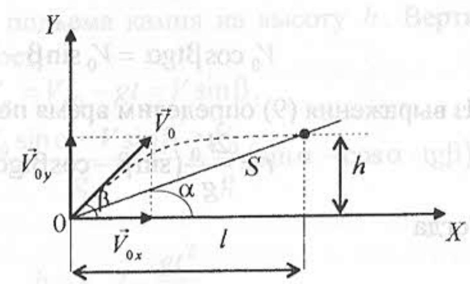
Размерность совпадает.

Расчет: $V_0 = \sqrt{g(2H+R)} = \sqrt{10(2\cdot 25+40)} = 30$ м/с.

Ответ: $\boxed{V_0 = 30\ \text{м/с}}$

16. Дано:
$\alpha = 30°$;
$\beta = 60°$;
$V_0 = 90$ м/с;
$g = 10$ м/с^2
$S = ?$

Решение:



Расстояние между минометом и местом падения мины будет минимальным, если вертикальная плоскость, проходящая через вектор скорости $\vec{V}_0$, и плоскость склона будут взаимно перпендикулярны.

Как известно, свободное движение тела в поле силы тяжести, являясь в общем случае криволинейным, представляет собой наложение равномерного движения вдоль горизонтали (по оси $0X$) и равноускоренного вдоль вертикали (по оси $0Y$).

Смещение по горизонтали:

$$l = V_{0x}t, \tag{1}$$

где $V_{0x} = V_0\cos\beta$ — скорость вдоль оси $0X$. (2)

Смещение по вертикали:

$$h = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \tag{3}$$

где $V_{0y} = V_0\sin\beta$ — начальная скорость вдоль оси $0Y$. (4)

Перемещение мины:

$$S = \frac{l}{\cos\alpha}. \tag{5}$$

$$\frac{h}{l} = \mathrm{tg}\alpha. \tag{6}$$

$$h = l\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{7}$$

Подставим (7) в выражение (3):

$$l\,\mathrm{tg}\alpha = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}. \tag{8}$$

С учетом выражений (1), (2) и (4) выражение (8) примет вид:

$$V_0\cos\beta\cdot t\cdot \mathrm{tg}\alpha = V_0\sin\beta\cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$V_0\cos\beta\,\mathrm{tg}\alpha = V_0\sin\beta - \frac{gt}{2}. \tag{9}$$

Из выражения (9) определим время полета

$$t = \frac{2V_0}{g}(\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\alpha). \tag{10}$$

Тогда

$$S = \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{V_0\cos\beta t}{\cos\alpha} = \frac{2V_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\alpha),$$

$$S = \frac{2V_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\alpha). \tag{11}$$

Проверка размерности:

$$[S] = \text{м}, \left[\frac{2V_0^2}{g}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\sin\beta - \cos\beta\,\mathrm{tg}\alpha)\right] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} = \text{м}.$$

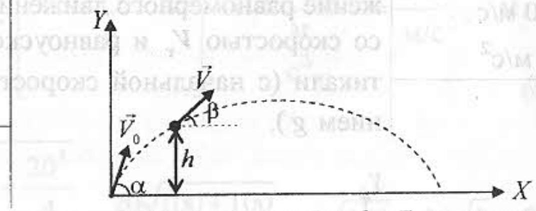
Размерность совпадает.

Расчет: $S = \dfrac{2\cdot 8100}{10}\cdot\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 810\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = 540$ м.

Ответ: $\boxed{S = 540\text{ м}}$.

17. Дано:
$V_0 = 21$ м/с;
$\alpha = 60^\circ$;
$\beta = 30^\circ$
$h = ?$

Решение:



Определим скорость камня на высоте h. В отсутствие сопротивления воздуха проекция вектора скорости на ось X — величина постоянная (т.е. $V_x = V_0\cos\alpha = V\cos\beta$). Скорость камня на высоте h равна

$$V = V_0\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Определим время подъема камня на высоту h. Вертикальная составляющая скорости

$$V_y = V_{y0} - gt = V\sin\beta.$$

$$t = \frac{V_{y0} - V\sin\beta}{g} = \frac{V_0\sin\alpha - V\sin\beta}{g} = \frac{V_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta).$$

Высота подъема

$$h = V_{y0}t - \frac{gt^2}{2}.$$

В данном случае удобнее производить расчеты по действиям.

Рассчитаем время:

$$t=\frac{V_0}{g}(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta)=\frac{21}{9,8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{21\sqrt{3}}{9,8\cdot 2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{9,8}\ \text{с.}$$

Рассчитаем высоту подъема:

$$h=V_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}=21\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{9,8}-\frac{9,8}{2}\cdot\left(\frac{7\sqrt{3}}{9,8}\right)^2=$$

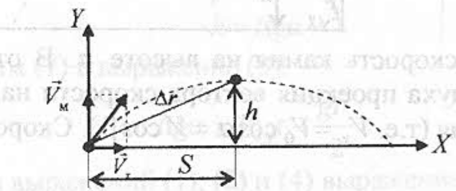
$$=\frac{21\cdot 21}{2\cdot 9,8}-\frac{49\cdot 3}{2\cdot 9,8}=\frac{21(21-7)}{2\cdot 9,8}=\frac{21\cdot 7}{9,8}=\frac{147}{9,8}=15\ \text{м.}$$

Ответ: $\boxed{h=15\ \text{м}}$.

18. Дано:
$V_т=36$ км/ч;
$V_м=20$ м/с;
$g=10$ м/с^2
$\Delta r=?$

Решение:

Движение мяча представляет собой наложение равномерного движения по горизонтали со скоростью $V_т$ и равноускоренного по вертикали (с начальной скоростью $V_м$ и ускорением g).



Из рисунка можно видеть, что

$$\Delta r=\sqrt{S^2+h^2},$$

где S — путь, пройденный теплоходом;

h — максимальная высота подъема.

$$S=V_т t;\quad h=\frac{gt^2}{2},$$

где t — время подъема на максимальную высоту.

На высоте h вертикальная составляющая скорости обращается в нуль:

$$V_y=V_м-gt=0.$$

$$t=\frac{V_м}{g}.$$

$$\Delta r=\sqrt{S^2+h^2}=\sqrt{(V_т t)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(V_т\cdot\frac{V_м}{g}\right)^2+\frac{g^4}{4}\cdot\frac{V_м^4}{g^4}}=$$

$$=\frac{1}{g}\sqrt{V_т^2V_м^2+\frac{V_м^4}{4}}.$$

$$\Delta r=\frac{\sqrt{V_т^2V_м^2+\frac{V_м^4}{4}}}{g}.$$

Проверка размерности:

$$[\Delta r]=\text{м},\quad \left[\frac{\sqrt{V_т^2V_м^2+\frac{V_м^4}{4}}}{g}\right]=\frac{\sqrt{\frac{\text{м}^4}{\text{с}^4}+\frac{\text{м}^4}{\text{с}^4}}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}=\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2}=\text{м}.$$

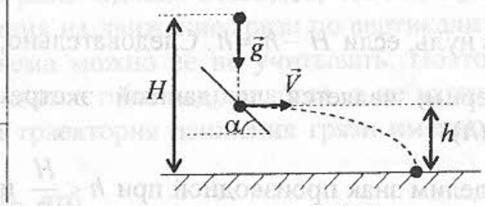
Расчет:

$$\Delta r=\frac{\sqrt{10^2\cdot 20^2+\frac{20^4}{4}}}{10}=\frac{20\sqrt{100+100}}{10}=2\sqrt{200}=20\sqrt{2}=28,2\ \text{м}.$$

Ответ: $\boxed{\Delta r=28,2\ \text{м}}$.

19. Дано:
$H=6$ м;
$\alpha=45^\circ$;
$t=t_{\max}$
$h=?$

Решение:



Движение шарика происходит в два этапа:

1) до удара о площадку;

2) после удара о площадку.

Путь, пройденный шариком на первом этапе:

$$H-h=\frac{gt_1^2}{2},$$

где $t_1=\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}}$ — время движения шарика до удара о площадку.

Так как после удара о площадку вектор скорости шарика направлен вдоль горизонтали, то движение шарика вдоль вертикали начинается с нулевой начальной скоростью.

Смещение по вертикали на втором этапе движения:

$$h=\frac{gt_2^2}{2},$$

где $t_2=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ — время движения шарика после удара о площадку.

Таким образом, время падения шарика с высоты H до земли:

$$t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H-h}+\sqrt{h}\right).$$

Можно видеть, что время падения шарика является функцией h. Так как по условию время падения шарика максимально, то необходимо исследование функции на экстремум. Функция имеет экстремум в некоторой точке, если ее производная в этой точке равна нулю ($t'(h)=0$).

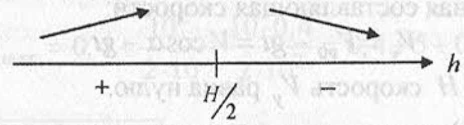
Итак, возьмем производную:

$$t'=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\left(\sqrt{H-h}\right)'+\left(\sqrt{h}\right)'\right]=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{H-h}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\right]=0.$$

Из полученного выражения видно, что производная t' обращается в нуль, если $H-h=h$. Следовательно, $h=\dfrac{H}{2}$.

Проверим, является ли данный экстремум максимумом функции $t(h)$.

Определим знак производной при $h<\dfrac{H}{2}$ и $h>\dfrac{H}{2}$. Получим соответственно $t'>0$ и $t'<0$.



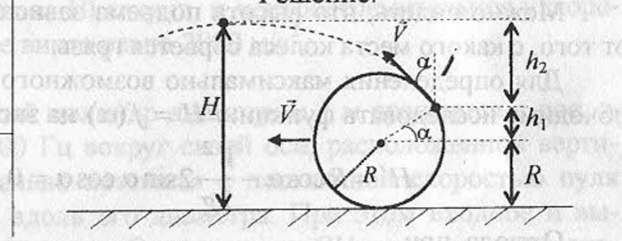
Таким образом, значение $h=\dfrac{H}{2}$ дает максимальное значение времени падения шарика.

Расчет: $h=\dfrac{H}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ м.

Ответ: $\boxed{h=3\text{ м}}$.

20. Дано:
$R=40$ см;
$V=10$ м/с;
$g=10$ м/с^2
$H=?$

Решение:



Рассмотрим общий случай, когда грязь срывается с произвольного места на колесе.

Поступательное движение колеса вдоль горизонтальной оси сообщает грязи дополнительную горизонтальную составляющую вектора скорости грязи. Однако очевидно, что эта составляющая не оказывает влияния на движение грязи по вертикали и при расчете высоты подъема можно ее не учитывать. Поэтому можно представить, что колесо просто вращается, а не катится. На рисунке изображена траектория движения грязи именно для этого случая.

Можно видеть, что

$$H=R+h_1+h_2, \qquad (1)$$

где

$$h_1=R\sin\alpha; \qquad (2)$$

$$h_2=V_{y0}t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Вертикальная составляющая скорости:

$$V_y = V_{y0} - gt = V\cos\alpha - gt. \qquad (4)$$

На высоте H скорость V_y равна нулю.

Тогда из (4) следует, что время подъема на высоту H:

$$t = \frac{V\cos\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в соотношение (3):

$$h_2 = V_{y0} - \frac{gt^2}{2} = V\cos\alpha\frac{V\cos\alpha}{g} - \frac{g}{2}\cdot\frac{V^2\cos^2\alpha}{g^2} = \frac{V^2\cos^2\alpha}{2g}. \qquad (6)$$

С учетом выражений (2) и (6) получаем

$$H = R + R\sin\alpha + \frac{V^2}{2g}\cos^2\alpha. \qquad (7)$$

Можно видеть, что высота подъема зависит от угла α, т.е. от того, с какого места колеса сорвется грязь.

Для определения максимально возможного значения H необходимо исследовать функцию $H = f(\alpha)$ на экстремум:

$$H' = R\cos\alpha - \frac{V^2}{2g}2\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, при

$$\sin\alpha = \frac{gR}{V^2} \qquad (8)$$

значение H максимально.

С учетом (8) и основного тригонометрического тождества из (7) получим:

$$H = R + R\frac{gR}{V^2} + \frac{V^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{gR}{V^2}\right)^2\right] = R + \frac{gR^2}{V^2} + \frac{V^2}{2g} - \frac{gR^2}{2V^2} = R + \frac{V^2}{2g} + \frac{gR^2}{2V^2}.$$

Итак,

$$H_{\max} = R + \frac{V^2}{2g} + \frac{gR^2}{2V^2}. \qquad (9)$$

Проверка размерности:

$$[H_{\max}] = \text{м}, \left[R + \frac{V^2}{2g} + \frac{gR^2}{2V^2}\right] = \text{м} + \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2} + \frac{(\text{м/с}^2)\cdot\text{м}^2}{(\text{м/с})^2} = \text{м}.$$

Размерность совпадает.

Расчет: $H_{\max} = 0{,}4 + \dfrac{10^2}{2\cdot 10} + \dfrac{10\cdot 0{,}4}{2\cdot 10^2} = 0{,}4 + 5 + 0{,}008 = 5{,}408$ м

Ответ: $\boxed{H_{\max} = 5{,}408 \text{ м}}$.

6.5 Вращательное движение

21. При вращении вала с постоянной угловой скоростью линейная скорость точек на его поверхности равна 9 м/с, а скорость точек, находящихся на 10 см ближе к оси, равна 6 м/с. Найти в СИ радиус вала.

22. Найти в СИ длину лопасти винта вертолёта, если винт делает 50 оборотов за 10 секунд, и центростремительное ускорение точек на конце винта равно 2000 м/с^2.

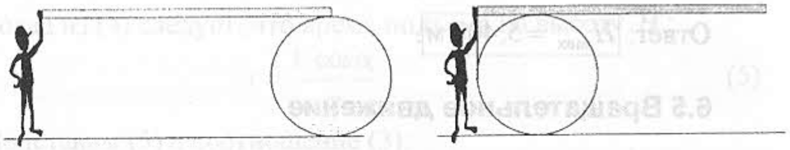
23. Пустотелый цилиндр диаметром 1 м вращается с постоянной частотой 100 Гц вокруг своей оси, расположенной вертикально. Горизонтально летевшая с постоянной скоростью пуля пробила цилиндр вдоль его диаметра. При этом входное и выходное отверстия совпали. Определить в СИ максимальную скорость пули внутри цилиндра.

24. При снижении вертолёт опускался вертикально с постоянной скоростью 10 м/с. Начиная с некоторой высоты h и до посадки он опускался равнозамедленно с ускорением 0,2 м/с^2. Сколько оборотов сделал винт вертолёта за время снижения с высоты h до посадки, если угловая скорость вращения винта 31,4 рад/с?

25. Два груза разной массы связаны тонкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок радиусом 5 см. Найти в СИ угловую скорость блока через 10 с после начала движения грузов, если более тяжелый груз опустился за это время на 0,5 м.

26. Человек держит один конец доски длиной 3,14 м, другой её конец лежит на цилиндре диаметром 1 м так, что доска горизонтальна. Затем человек двигает доску вперед, вследствие чего

цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Какой путь должен пройти человек, чтобы достичь цилиндра? Ответ дать в СИ.

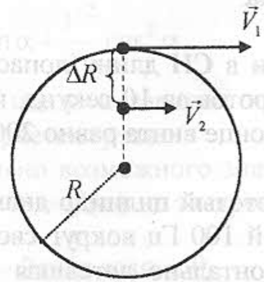


ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 21–26

21. Дано:
$\omega = \text{const}$;
$V_1 = 9$ м/с;
$\Delta R = 10$ см;
$V_2 = 6$ м/с

$R = ?$

Решение:



Связь между линейной и угловой скоростями задается соотношением

$$V = \omega R.$$

Отсюда,

$$\omega = \frac{V}{R}.$$

Тогда из условия задачи следует, что

$$\omega = \frac{V_1}{R} = \frac{V_2}{R - \Delta R}.$$

$$V_1(R - \Delta R) = V_2 R.$$

$$(V_1 - V_2)R = V_1 \Delta R.$$

$$R = \frac{V_1 \Delta R}{V_1 - V_2}.$$

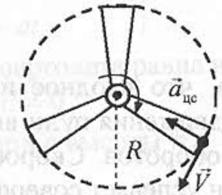
Расчет: $$R = \frac{V_1 \Delta R}{V_1 - V_2} = \frac{9 \cdot 0{,}1}{9 - 6} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Ответ: $R = 0{,}3$ м.

22. Дано:
$N = 50$;
$t = 10$ с;
$a_{\text{цс}} = 2000$ м/с^2

$R = ?$

Решение:



По определению

$$a_{\text{цс}} = \omega^2 R. \qquad (1)$$

Круговая частота

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (2)$$

Частота

$$\nu = \frac{N}{t}. \qquad (3)$$

С учетом выражений (2) и (3) соотношение (1) примет следующий вид:

$$a_{\text{цс}} = 4\pi^2 \frac{N^2}{t^2} \cdot R. \qquad (4)$$

Отсюда,

$$R = \frac{a_{\text{цс}} \cdot t^2}{4\pi^2 \cdot N^2}. \qquad (5)$$

Проверка размерности:

$$[R] = \text{м}, \left[\frac{a_{\text{цс}} \cdot t^2}{4\pi^2 \cdot N^2}\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2 = \text{м}.$$

Размерность совпадает.

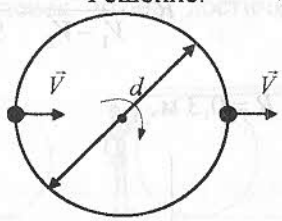
Расчет: $$R = \frac{a_{\text{цс}} \cdot t^2}{4\pi^2 \cdot N^2} = \frac{2000 \cdot 10^2}{4 \cdot 10 \cdot 50^2} = 2 \text{ м}.$$

Ответ: $\boxed{R = 2 \text{ м}}$.

23. Дано:
$d = 1$ м;
$\nu = 100$ Гц

$V_{max} = ?$

Решение:



Очевидно, что входное и выходное отверстия совпадают, если за время движения пули внутри цилиндра он совершает 0,5; 1,5; 2,5 и т.д. оборотов. Скорость пули внутри цилиндра максимальна, если он успевает совершить ровно 0,5 оборота.

Время движения пули внутри цилиндра определим из выражения

$$d = Vt,\ t = \frac{d}{V}. \qquad (1)$$

В рассматриваемом случае угол поворота цилиндра $\varphi = \pi$ рад.

Угол поворота

$$\varphi = \omega t = 2\pi\nu t. \qquad (2)$$

С учетом (1) выражение (2) принимает вид:

$$\varphi = 2\pi\nu\frac{d}{V}. \qquad (3)$$

Из выражения (3) следует, что

$$V = \frac{2\pi\nu d}{\varphi}. \qquad (4)$$

Проверка размерности:

$$[V] = \text{м/с},\ \left[\frac{2\pi\nu d}{\varphi}\right] = \frac{1}{\text{с}}\cdot\text{м} = \text{м/с}.$$

Размерность совпадает.

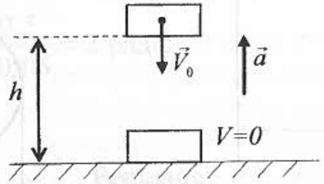
Расчет: $V = \dfrac{2\pi\nu d}{\varphi} = \dfrac{2\pi\cdot 100\cdot 1}{\pi} = 200$ м.

Ответ: $\boxed{V_{max} = 200 \text{ м}}$.

24. Дано:
$V_0 = 10$ м/с;
$a = 0{,}2$ м/с^2;
$\omega = 31{,}4$ рад/с

$N = ?$

Решение:



Зависимость скорости от времени при равнозамедленном движении:

$$V = V_0 - at.$$

Так как посадочная скорость вертолета равна нулю, то

$$V = V_0 - at = 0.$$

Отсюда, время спуска вертолета с высоты h:

$$t = \frac{V_0}{a}.$$

Угол поворота винта φ за время t можно определить как

$$\varphi = \omega t.$$

За один полный оборот винт поворачивается на угол 2π.

Тогда $\varphi = 2\pi N$.

Таким образом, $\varphi = 2\pi N = \omega t$.

Число полных оборотов $N = \dfrac{\omega t}{2\pi}$.

С учетом того, что $t = \dfrac{V_0}{a}$, получаем

$$N = \frac{\omega V_0}{2\pi a}.$$

Проверка размерности:

$$[N] = 1,\ \left[\frac{\omega V_0}{2\pi a}\right] = \frac{(\text{рад/с})\cdot(\text{м/с})}{\text{рад}\cdot\left(\text{м/с}^2\right)} = 1.$$

Размерность совпадает.

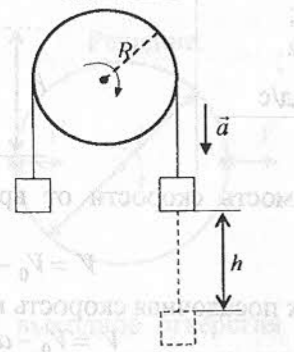
Расчет: $N = \dfrac{\omega V_0}{2\pi a} = \dfrac{31{,}4\cdot 10}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}2} = 250$.

Ответ: $N = 250$.

25. Дано:
$R = 5$ см;
$t = 10$ с;
$h = 0,5$ м

$\omega = ?$

Решение:



Путь, пройденный более тяжелым грузом:

$$h = \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Скорость в конце пути:

$$V = at. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что ускорение

$$a = \frac{2h}{t^2}. \qquad (3)$$

Тогда с учетом соотношения (3) выражение (2) примет вид:

$$V = \frac{2h}{t}. \qquad (4)$$

Линейная и угловая скорости связаны соотношением

$$V = \omega R. \qquad (5)$$

Из выражений (4) и (5) следует, что $\omega = \dfrac{V}{R} = \dfrac{2h}{tR}$.

Таким образом, $\omega = \dfrac{2h}{tR}$.

Проверка размерности: $[\omega] =$ рад/с, $\left[\dfrac{2h}{tR}\right] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{м}} = \dfrac{1}{\text{с}}$.

Размерность совпадает*.

* Так как численное значение угла, выраженное в радианах, — это отношение длины дуги окружности, заключенной в пределах угла, к радиусу, то радиан — величина безразмерная.

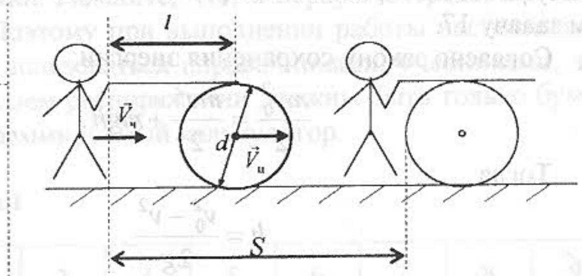
Расчет: $\omega = \dfrac{2h}{tR} = \dfrac{2\cdot 0,5}{10\cdot 0,05} = 2$ рад/с.

Ответ: $\omega = 2$ рад/с.

26. Дано:
$l = 3,14$ м;
$d = 1$ м

$S = ?$

Решение:



Пусть человек движется со скоростью $V_ч$. Тогда путь, который пройдет человек,

$$S = V_ч t, \qquad (1)$$

где t — время движения.

Очевидно, что скорость верхней точки цилиндра равна скорости человека $V_ч$. Тогда скорость оси цилиндра

$$V_ц = \frac{V_ч}{2}. \qquad (2)$$

Скорость человека относительно цилиндра

$$V = V_ч - V_ц = V_ц. \qquad (3)$$

Относительно цилиндра человек проходит расстояние

$$l - \frac{d}{2} = Vt. \qquad (4)$$

Время движения t из (4) с учетом (3)

$$t = \frac{l - d/2}{V_ц}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в (1). В результате с учетом (2) получим:

$$S = V_ч \cdot \frac{l - d/2}{V_ц} = 2V_ц \cdot \frac{l - d/2}{V_ц} = 2l - d.$$

Таким образом, $S = 2l - d$.

Расчет: $S = 2l - d = 2\cdot 3,14 - 1 = 5,28$ м.

Ответ: $\boxed{S = 5,28 \text{ м}}$.

Следует отметить, что практически любая задача может иметь альтернативные решения. Например, задачи механики на движение под действием некоторой силы можно решать: 1) через кинематические соотношения и второй закон Ньютона; 2) используя закон сохранения энергии. В качестве примера рассмотрим задачу 17.

Согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Тогда

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

Так как $v_x = v_0 \cos\alpha = v \cos\beta$, то $v = v_0 \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Отсюда

$$h = \frac{v_0^2\left[1 - \left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2\right]}{2g}.$$

Итак, $h = \dfrac{21^2\left[1 - \left(\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2\right]}{2 \cdot 9{,}8} = \dfrac{441}{3 \cdot 9{,}8} = 15$ м.

Таким образом, приведенные в примерах решения задач алгоритмы — не единственно возможные. Вы должны научиться *решать* задачи, а не воспроизводить решение по известному алгоритму.