



ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Кириллов А.М., учитель гимназии № 44 г. Сочи (<http://kirillandrey72.narod.ru/>)

1. При приближении к МКС космический корабль начинает торможение на расстоянии 10 км от станции. При этом расстояние между ними в каждый момент времени определяется по формуле $d = 10 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t}$, где t – время в часах с начала торможения. Через сколько секунд после начала торможения расстояние между кораблем и станцией станет меньше 1 км, если известно, что стыковка произойдет через 10 часов? [7,5]

Решение:

$$d = 10 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t} \quad (1)$$

Т.к. при стыковке $d=0$, то из (1) следует, что $t_0=10$ ч.

Выражаем из (1) время t . Получаем

$$t = \frac{(10 - d)t_0}{2d + 10} \quad (2)$$

Произведем расчет (по условию задачи $d=1$ км).

$$t = \frac{(10 - 1) \cdot 10}{2 \cdot 1 + 10} = \frac{90}{12} = 7,5 \text{ ч.}$$

Ответ: $t = 7,5$ ч.

.....
2. При приближении к МКС космический корабль начинает торможение на расстоянии 50 км от станции. При этом расстояние между ними в каждый момент времени определяется по формуле $d = 50 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t}$, где t – время в часах с начала торможения. Какой будет скорость корабля в момент стыковки, если известно, что она произойдет через 10 часов? (Ответ округлите до 1 км/час). [2]

Решение:

$$d = 50 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t} \quad (1)$$

Т.к. при стыковке $d=0$, то из (1) следует, что $t_0=10$ ч.

По физическому смыслу производной, она определяет скорость изменения функции. Поэтому скорость станции равна производной пути s по времени:

$$v = s' \quad (2)$$

Из условия задачи следует, что

$$s = 50 - 50 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t}. \quad (3)$$

Берем производную. Получаем

$$\begin{aligned} v = s' &= \left(50 - 50 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t} \right)' = \left(-50 \cdot \frac{t_0 - t}{t_0 + 2t} \right)' = -50 \left[(t_0 - t) \cdot \left(\frac{1}{t_0 + 2t} \right)' + \frac{(t_0 - t)'}{t_0 + 2t} \right] = \\ &= -50 \left[-\frac{t_0 - t}{(t_0 + 2t)^2} - \frac{1}{t_0 + 2t} \right] = \frac{50}{t_0 + 2t} \left(\frac{t_0 - t}{t_0 + 2t} + 1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v = \frac{50}{t_0 + 2t} \left(\frac{t_0 - t}{t_0 + 2t} + 1 \right). \quad (4)$$

Расчет:

$$v = \frac{50}{10 + 2 \cdot 10} \left(\frac{10 - 10}{10 + 2 \cdot 10} + 1 \right) = \frac{50}{30} \approx 1,67 \text{ км/ч.}$$

Ответ округлим до 1 км/час.

Ответ: $v \approx 2$ км/ч.

.....
3. Моторная лодка и плот одновременно отплывают от пристани вниз по течению реки. Расстояние между лодкой и плотом (в км) задается формулой $S(t) = c \cdot \log_2(t+1)$, где t – время, измеренное в часах. Через 1 час после начала движения расстояние между лодкой и плотом составило 2 км. Через сколько часов после начала движения лодка удалится от плота на 6 км? [7]

Дано: $t_1=1$ ч, $S_1=2$ км, $S_2=6$ км

Найти: $t_2=?$

Решение:

$$S \text{ (км)} = c \cdot \log_2(t+1) \quad (1)$$

$$S_1 = c \cdot \log_2(t_1 + 1), \quad S_2 = c \cdot \log_2(t_2 + 1).$$

Возьмем отношение S_2 к S_1 :

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{c \cdot \log_2(t_2 + 1)}{c \cdot \log_2(t_1 + 1)} = \frac{\log_2(t_2 + 1)}{\log_2(t_1 + 1)} = \frac{\log_2(t_2 + 1)}{\log_2(1 + 1)} = \frac{\log_2(t_2 + 1)}{\log_2 2}. \\ \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\log_2(t_2 + 1)}{\log_2 2}. \\ \frac{6}{2} &= \frac{\log_2(t_2 + 1)}{1}. \\ 3 &= \frac{\log_2(t_2 + 1)}{1}. \end{aligned}$$

$$3 = \log_2(t_2 + 1).$$

$$2^3 = t_2 + 1.$$

$$8 = t_2 + 1.$$

$$t_2 = 7 \text{ ч.}$$

Ответ: $t_2 = 7$ ч.

.....

4. Моторная лодка и плот одновременно отплывают от пристани вниз по течению реки. Расстояние между лодкой и плотом (в км) задается формулой $S = c \cdot \log_2\left(\frac{t}{2} + 1\right)$, где t – время, измеренное в часах. Через 2 часа после начала движения расстояние между лодкой и плотом составило 2,5 км. В течение скольких часов после начала движения расстояние между лодкой и плотом не превышает 10 км? [30]

5. Плот отплывает от пристани вниз по течению реки. Через 2 часа вслед за плотом от этой пристани отходит моторная лодка. Расстояние между лодкой и плотом (в км) через t часов после старта лодки задается формулой $S = 10 - c \cdot \log_2(3t + 1)$. Через час после начала движения расстояние между лодкой и плотом составило 2 км. В течение скольких минут после начала движения лодки расстояние между лодкой и плотом не превышает 6 км? [72,8]

6. Небоскреб «Эмпайр Стейт Билдинг» в Нью-Йорке имеет 102 этажа. Шарик, свободно сброшенный с вершины небоскреба, пролетев 33 этажа, набрал скорость 50 м/с. Через сколько секунд с начала падения он ударится о землю? (Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . Ответ округлите до 1 секунды). [9]

Дано: $N=102$, $N_1=33$, $v_1=50 \text{ м/с}$

Найти: $t=?$

Решение:

Известно, что при свободном падении пройденный путь $S(t) = \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Поскольку путь S пропорционален числу этажей N , то число этажей пропорционально квадрату времени. Таким образом, можно составить пропорцию

$$\frac{N}{N_1} = \frac{t^2}{t_1^2}. \quad (1)$$

Т.к. свободное падение является равноускоренным, то время

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{50}{10} = 5 \text{ с. Из (1) следует, что}$$

$$t = \sqrt{\frac{N}{N_1}} t_1 = \sqrt{\frac{102}{33}} \cdot 5 \approx 8,79 \approx 9 \text{ с.}$$

Ответ: $t \approx 9$ с

.....

7. Металлический шарик, свободно сброшенный с вершины Останкинской телебашни, пролетает мимо ресторана «Седьмое небо», находящегося на высоте 335 м над землей, через 6,4 секунды. Найдите высоту телебашни. (Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2). [539,8]

8. Металлический шарик, свободно сброшенный с вершины Останкинской телебашни, пролетает мимо ресторана «Седьмое небо», находящегося на высоте 335 м над землей, со скоростью 64 м/с. Через сколько секунд после пролета мимо ресторана шарик ударится о землю? (Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . Ответ округлите до 1 секунды). [4]

9. Металлический шарик, свободно сброшенный с вершины Останкинской телебашни, пролетает мимо ресторана «Седьмое небо», находящегося на высоте 335 м над землей, со скоростью 64 м/с. С какой скоростью шарик ударится о землю? (Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . Ответ округлите до 1 м/с). [104]

10. Высоту подброшенного вверх мяча (в метрах) можно вычислить по формуле $h(t)=1,5+12t-5t^2$, где t – время в секундах с момента броска. На какую максимальную высоту поднимется мяч? [8,7]

Решение:

Формальное решение данной задачи сводится к поиску экстремума функции $h(t)$. Возьмем производную этой функции и приравняем ее к нулю:

$$h'(t)=12-10t=0. \quad (1)$$

Из (1) следует, что значение аргумента t , при котором функция $h(t)$ имеет экстремальное значение равно 1,2.

Подставив это значение аргумента в (1), получим значение экстремума $h(t)=1,5+12 \cdot 1,2-5 \cdot 1,2^2=8,7$ м.

Как выглядит данная ситуация с точки зрения физики? Производная $h(t)$ по времени t – это скорость мяча. Равенство производной нулю означает, что на максимальной высоте скорость мяча равна нулю. Таким образом находим время подъема на максимальную высоту. Далее подставляем значение времени в выражение для высоты подъема и получаем ее максимальное значение.

Ответ: $h_{\max}=8,7$ м.

.....

11. Высоту подброшенного вверх мяча (в метрах) можно вычислить по формуле $h(t)=4+19t-5t^2$, где t – время в секундах с момента броска. С какой скоростью мяч упадет на землю? [21]

12. Высоту подброшенного вверх мяча (в метрах) можно вычислить по формуле $h(t)=4+19t-5t^2$, где t – время в секундах с момента броска. Через сколько секунд мяч упадет на землю? [4]

13. Автомобиль, стартуя с места и двигаясь с постоянным ускорением, через 15 секунд достигает 100 км/час. Какое расстояние в метрах он пройдет за это время? (Ответ округлите до 1 м). [208]

14. Объем воды в термошкафе для выпаривания изменяется по формуле $v(t)=v_0 \cdot (1-0,025t)$, где v_0 – начальный объем воды в мл, а t – время выпаривания в минутах. В шкаф загрузили 1 л 15 %-го солевого раствора. Какой будет концентрация раствора (в процентах) через 25 минут после выпаривания. (Можно считать, что объем (вес) соли при выпаривании не меняется). [32]

Решение:

Согласно условия задачи, объем соли $v_c=0,15$ л, следовательно начальный объем воды равен $v_c=0,85$ л.

Найдем объем воды спустя 25 минут:

$$v(25)=0,85 \cdot (1-0,025 \cdot 25)=0,31875 \text{ л.}$$

Объем раствора в это время равен:

$$v_p=v_c+v(25)=0,15+0,31875=0,46875 \text{ л.}$$

$$\text{Концентрация раствора: } k = \frac{v_c}{v_p} \cdot 100\% = \frac{0,15}{0,46875} \cdot 100\% = 32\%$$

Ответ: $k = 32\%$.

.....

15. Коэффициент линейного теплового расширения α_L показывает относительное изменение длины тела при нагревании на температуру ΔT : $\Delta L = \alpha_L \cdot L_0 \cdot \Delta T$. При температуре 20°C длины алюминиевого и медного провода одинаковы и равны 25 м. Оба провода нагрели до 100°C . На сколько миллиметров алюминиевый провод стал длиннее медного, если коэффициент линейного теплового расширения алюминия $\alpha_{\text{Al}} = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, а меди $\alpha_{\text{Cu}} = 16,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Ответ округлите до 1 мм. [15]

16. Коэффициент объемного теплового расширения β_V показывает относительное изменение объема тела при нагревании на температуру ΔT : $\Delta V = \beta_V \cdot V_0 \cdot \Delta T$. В U-образной трубке находится керосин. В одном колене высота уровня керосина $h_1 = 20$ см, а температура 15°C . Какова температура керосина в другом колене, если высота уровня в нем на $\Delta h = 1,2$ см выше. Коэффициент объемного расширения керосина $\beta_V = 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. [77,5]

Решение:

$$\Delta V = \beta_V \cdot V_0 \cdot \Delta T,$$

$$\Delta h \cdot S = \beta_V \cdot h_1 \cdot S \cdot \Delta T \quad (S - \text{площадь сечения трубки}),$$

$$\Delta T = \frac{\Delta h}{\beta_V \cdot h_1} = \frac{1,2}{0,96 \cdot 10^{-3} \cdot 20} = 62,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Следовательно, температура в нагретой части трубки $t = 15 + 62,5 = 77,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ответ: $t = 77,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

.....

17. Плотность ртути уменьшилась при нагревании до 98 % от ее плотности при 0°C . До какой температуры нагрели ртуть? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta_{\text{Hg}} = 0,181 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Коэффициент объемного теплового расширения β_V показывает относительное изменение объема тела при нагревании на температуру ΔT : $\Delta V = \beta_V \cdot V_0 \cdot \Delta T$. [112,7]

Решение:

Плотность при 0°C $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$. Плотность при нагревании до

некоторой температуры $\rho = 0,98\rho_0 = 0,98 \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V_0 + \Delta V}$.

$$\frac{0,98}{V_0} = \frac{1}{V_0 + \beta_V V_0 \Delta T}, \quad 0,98 = \frac{1}{1 + \beta_V \Delta T}, \quad 0,98\beta_V \Delta T = 0,02,$$

$$\Delta T = \frac{0,02}{0,98\beta_V} = \frac{0,02}{0,98 \cdot 0,181 \cdot 10^{-3}} = 112,75 \text{ }^\circ\text{C}, \quad t = 0 + \Delta T = 112,75 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ответ: $t = 112,75 \text{ }^\circ\text{C}$.