Производная в физике

Кириллов А.М., учитель гимназии № 44 г. Сочи (http://kirillandrey72.narod.ru/)

Физический смысл производной

Если s – путь, пройденный телом, а зависимость пути от времени $s(t)$, то производная $\frac{ds}{dt}$ выражает скорость движения в момент времени t, т.е. мгновенная скорость

$$v=\frac{ds}{dt}. \tag{1}$$

Например, закон равноускоренного движения материальной точки задан зависимостью

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \tag{2}$$

где x_0 – начальная координата материальной точки, v_{0x} – проекция начальной скорости материальной точки на ось $0x$, a_x - проекция ускорения материальной точки на ось $0x$. Тогда проекция скорости движения материальной точки на ось $0x$ в момент времени t:

$$v=\frac{dx}{dt} = \left(x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\right)' = v_{0x} + a_x t. \tag{3}$$

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x определяет *скорость (быстроту) изменения функции в точке x*. Другими словами, это скорость изменения величины y, зависящей от величины x, в ходе некоторого процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$. В этом и состоит *физический смысл производной*.

Рассмотрим в качестве примера функцию $y = x^2$. Производная данной функции $\frac{dy}{dx} = 2x$. При x=1 производная равна 2, при x=2 производная равна 4. Это означает, что в точке x=1 функция y меняется быстрее аргумента x в 2 раза, а в точке x=2 - в 4 раза.

Примеры применения производной в физике

Пример 1 –Мгновенное значение силы переменного тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{4}$$

Например, при электромагнитных колебаниях, возникающих в колебательном контуре, заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону $q = q_0 \cos\omega t$. Тогда $I = -\frac{dq}{dt} = -q_0\omega \sin\omega t$.

Пример 2 –Мгновенное значение ЭДС электромагнитной индукции

Согласно закону электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{5}$$

Например, при равномерном вращении проводящего контура площадью S в однородном магнитном поле с индукцией B с угловой скоростью ω, магнитный поток, пронизывающий данный контур, изменяется по закону $\Phi = BS\cos\omega t$. Тогда $\varepsilon_{инд} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\omega\sin\omega t$.

Пример 3 –Максимальная мощность, выделяемая на нагрузке электрической цепи

Мощность тока

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R. \tag{6}$$

Известно, что функция имеет экстремум (max или min) в точке в которой ее производная равна нулю. В данном случае $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R\right] = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^3} = 0$. Из решения полученного уравнения следует, что максимальная мощность на нагрузке может быть достигнута, если ее сопротивление R равно внутреннему сопротивлению источника тока r. Т.е. $P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$, если $R = r$.